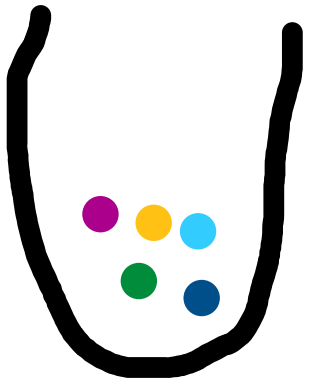
Mathematik
09. November 2020

2m5

1. Beispiel:

Drei Kugeln werden aus der Urne mit einem Griff gezogen.



Bisher:

Mögliche Ergebnisse beim ziehen nacheinander ohne zurücklegen:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$$

Anzahl der möglichen Anordnungen von 3 Kugeln

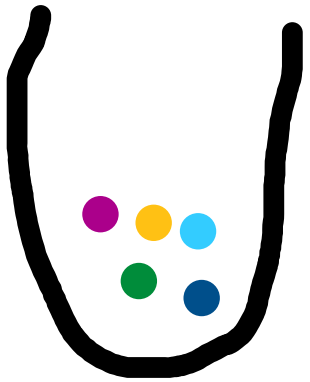
$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

Idee: Ziehen mit einem Griff:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$$

II.6 Ziehen aus einer Urne **mit einem Griff**

Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen:



Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden **mit einem Griff** k Kugeln gezogen.

„Mit einem Griff“ heißt **ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge**.

Dann gibt es

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \big(n-(k-1)\big)}{k!}$$

verschiedene Ergebnisse.

II.6 Ziehen aus einer Urne **mit einem Griff**

Vereinfachung von

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \big(n-(k-1)\big)}{k!}$$

Schön wäre im Zähler:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \big(n-(k-1)\big) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$\Rightarrow$Idee: Erweitern mit $(n-k)!$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \big(n-(k-1)\big) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

II.6 Ziehen aus einer Urne **mit einem Griff**

*Definition **Binomialkoeffizient**:*

Man nennt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Binomialkoeffizient, wobei gilt: $k \in \mathbb{N}_0, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$

Und sagt: „k aus n“ oder „n über k“

II.6 Ziehen aus einer Urne **mit einem Griff**

Beispiel:

Der Mathematikkurs 2m5 (23 Schüler) verteilt sich zufällig in einem Klassenzimmer mit 30 Sitzplätzen.

Im Urnenmodell:

Es gibt 30 nummerierte Kugeln (je eine pro Sitzplatz).

23 Kugeln werden mit einem Griff gezogen.

Es gibt also

$$\binom{30}{23} =$$

II.6 Ziehen aus einer Urne **mit einem Griff**

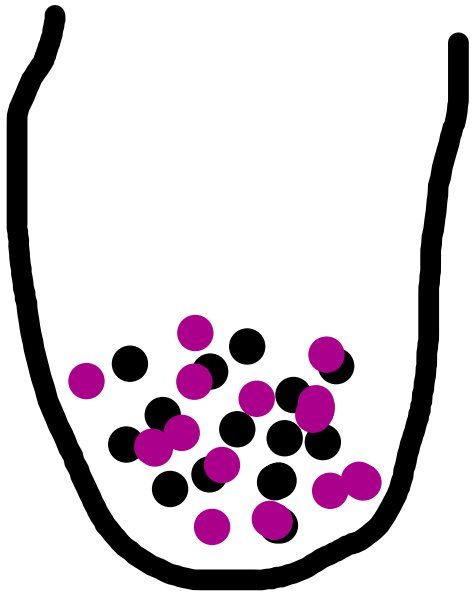
Satz:

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen $\boldsymbol{S}$ schwarz sind, werden **mit einem Griff** n Kugeln gezogen.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

Für die Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(X = s) = \frac{\binom{\boldsymbol{S}}{s} \cdot \binom{N - \boldsymbol{S}}{n - s}}{\binom{N}{n}}$$

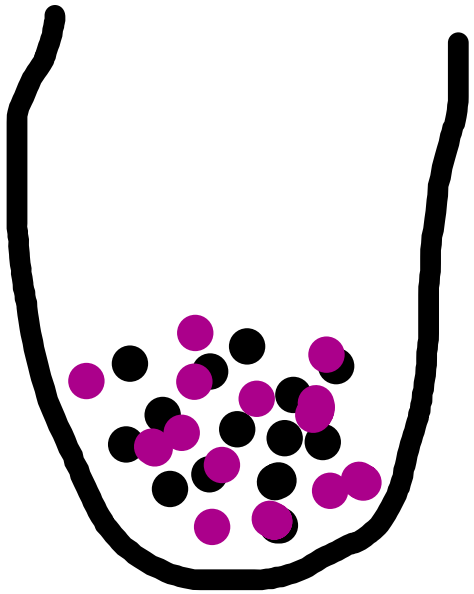


II.6 Ziehen aus einer Urne **mit einem Griff**

Beispiel:

Lottozahlen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit beim Lottospiel „6 aus 49“ 6 richtige zu tippen?

Urnenmodell: 49 Kugeln, 6 davon schwarz (die getippten)



$$P(X = 6) = \frac{\binom{\mathbf{6}}{6} \cdot \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}}$$

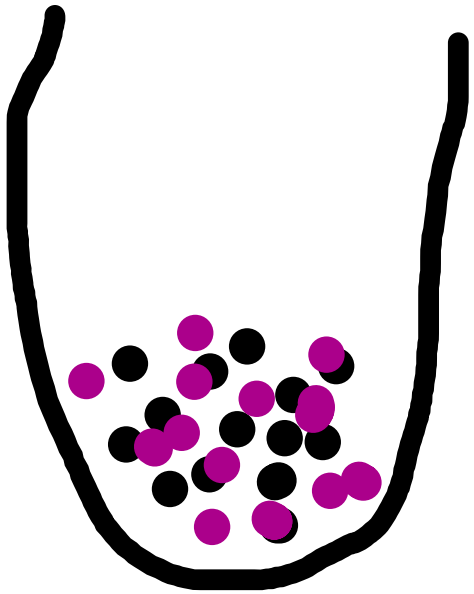
$$= \frac{1}{13.983.816}$$

II.6 Ziehen aus einer Urne **mit einem Griff**

Beispiel:

Lottozahlen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit beim Lottospiel „6 aus 49“ 2 richtige zu tippen?

Urnenmodell: 49 Kugeln, 6 davon schwarz (die getippten)

$$P(X = 2) = \frac{\binom{\mathbf{6}}{2} \cdot \binom{43}{4}}{\binom{49}{6}}$$

$$\approx 0{,}132$$