Zufallsgröße und Binomialverteilung Q12

Schuljahr 2020/21

Inhalte

1. Zufallsgrößen
2. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße
3. Erwartungswert einer Zufallsgröße
4. Varianz einer Zufallsgröße
5. Ziehen aus einer Urne mit Beachtung der Reihenfolge
6. Ziehen aus einer Urne “mit einem Griff“
7. Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette
8. Binomialverteilung
9. Modellieren mit der Binomialverteilung
10. Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

II. Zufallsgrößen und Binomialverteilung
II.1 Zufallsgrößen

BSP S. 60

a) Lösung
$\Omega = \{(0;0);(0;1);(0;3);(1;0);(1;1);(1;3);(3;0);(3;1);(3;3)\}$

b) Lösung:

Minimaler Gewinn: $(0;0);(0;1);(0;3);(1;0);(3;0)$

Diesen Zahlentupeln wird der Wert „0“ zugeordnet

Maximaler Gewinn: $(3;3)$

Diesem Zahlentupel wird der Wert „9“ zugeordnet

II.1 Zufallsgrößen

Definition:

$$X: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X\big((3;1)\big) = 3$$

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, wird als **Zufallsgröße** oder **Zufallsvariable auf Ω** bezeichnet.

Kurz:

$$X: \omega \mapsto X(\omega) \quad mit\ \omega \in \Omega \quad und\ X(\omega) \in \mathbb{R}$$

II.1 Zufallsgrößen

Übungen:

S. 61 Nr. 2

Nr. 3

Nr. 4

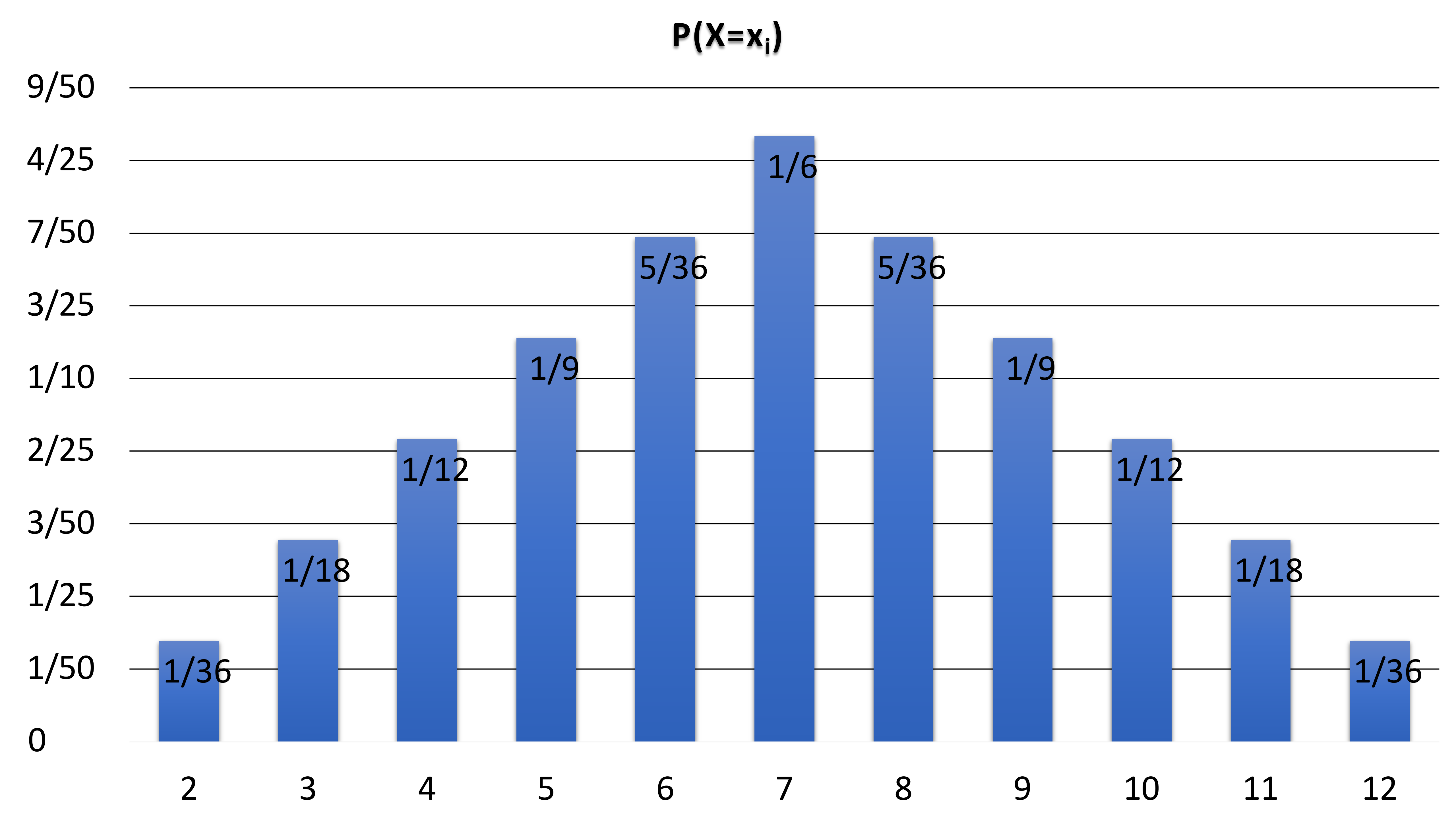
II.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Beispiel:

Ein Laplace-Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X ist die Augensumme.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit zu jedem Ereignis $X = x_i$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$


P(X=x_i)
9/50
4/25
7/50
3/25
1/10
2/25
3/50
1/25
1/50
0
1/36
1/18
1/12
1/9
5/36
1/6
5/36
1/9
1/12
1/18
1/36
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

II.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Definition:

Die Funktion, die jedem Wert x_i $(i = 1,2,3, \ldots, n)$ einer Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet, wird als

Wahrscheinlichkeitsfunktion **der Zufallsgröße** X oder

Wahrscheinlichkeitsverteilung **der Zufallsgröße** X bzw.

kurz **Verteilung** von X bezeichnet.

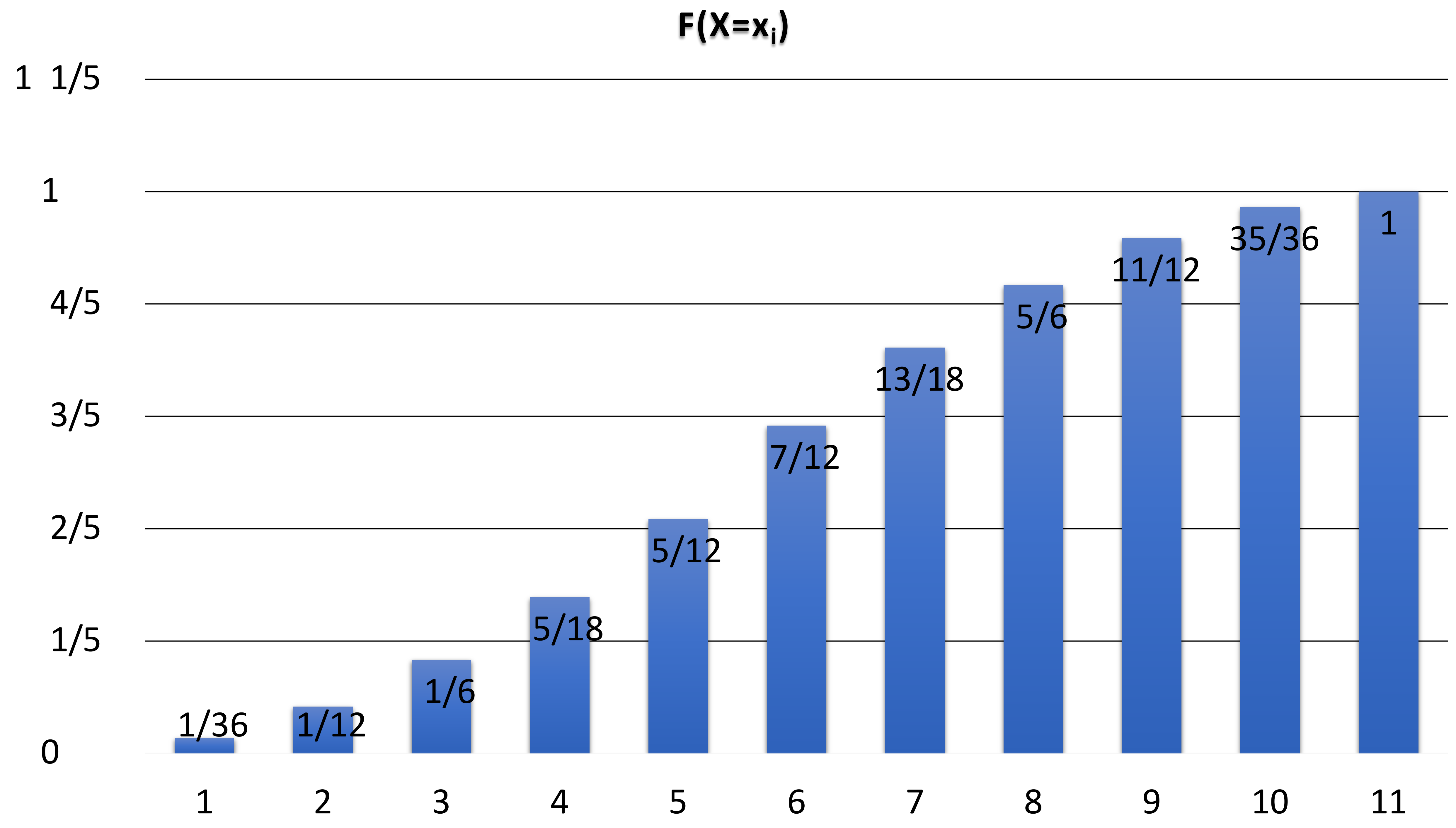
II.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Beispiel (Fortsetzung):

Ein Laplace-Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X ist die Augensumme.

Gesucht ist der Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme höchstens x_i ist, also $\mathrm{P}(X \leq \ x_i)$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F(X \leq x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$


F(X=x$_i$)
1 1/5
1
4/5
3/5
2/5
1/5
0
1/36
1/12
1/6
5/18
5/12
7/12
13/18
5/6
11/12
35/36
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

II.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Definition:

Die Funktion F, die bei gegebener Zufallsgröße X jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet, heißt

Kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X oder

Kurz:

$$F: x \mapsto P(X \leq x) \quad mit\ x \in \mathbb{R} \quad und\ 0 \leq P(X \leq x) \leq 1$$

II.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Übungsaufgaben:

S. 65 Nr. 2,

S. 66 Nr. 5

Kummulierte Verteilungsfunktion

S. 65 Nr. 3

S. 66 Nr. 8

II.3 Erwartungswert einer Zufallsgröße

Für 1,60€ können Sie an folgendem Spiel teilnehmen:

Eine Laplace Münze wird dreimal geworfen. Sie erhalten die Anzahl der geworfenen Wappen in ganzen € ausgezahlt.

Würden Sie an diesem Spiel teilnehmen?

Versuchen Sie die Überlegungen mathematisch zu beschreiben!

https://clipground.com/images/flipped-clipart-16.jpg

II.3 Erwartungswert einer Zufallsgröße

$$P(3\,Wappen) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(2\,Wappen) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(1\,Wappen) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(kein\,Wappen) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Wie kommen wir auf den durchschnittlichen Gewinn?