Lösungen

S. 149 Nr. 3, Nr. 4 a,c,e,g,i, Nr. 5. Nr. 7 a, b, c, d,
S. 150 Nr. 10 a,b,c, Nr. 11 a,b,c
S. 151 Nr. 14, Nr. 15

S. 149 Nr. 3

a) $f_a(x) = x^3 + 1$
$D_{max} = \mathbb{R}$
$W = \mathbb{R}$
Nullstellen: $0 = x^3 + 1$
$x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$
SP mit y-Achse: $f(0) = 1$
$\Rightarrow P(0|1)$
Keine Asymptoten
Keine Symmetrie bzgl. KoSy

b) $f_b(x) = x^4 + 1$
$D_{max} = \mathbb{R}$
$W = [1; +\infty[$
Nullstellen: $0 = x^4 + 1$
$x^4 = -1 \Rightarrow$ keine Nullstelle
SP mit y-Achse: $\mathrm{f_b}(0) = 1$
$\Rightarrow P(0|1)$
Keine Asymptoten
Symmetrie: $f_b(-x) = (-x)^4 + 1 = x^4 + 1 = f_b(x)$ ⇒Achsensymmetrisch bzgl. y-Achse

c) $f_c(x) = \frac{10}{x-5} + 4$
$D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{5\}$
$W = \mathbb{R}\backslash\{4\}$
Nullstellen: $0 = \frac{10}{x-5} + 4$
... $-4(x-5) = 10 \Rightarrow \quad x = 2{,}5$
SP mit y-Achse: $\mathrm{f_c}(0) = 4$
$\Rightarrow P(0|4)$
Senkrechte Asymptoten $x = 5$, waagerechte Asymptote $y = 4$
Keine Symmetrie bzgl. KoSy

d) $f_d(x) = 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$
$D_{max} = \mathbb{R}$
$W = [0; 6]$
Nullstellen: $0 = 3 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$
$-1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x_k = 2k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}$

SP mit y-Achse: $\mathrm{f_d}(0) = 3$
$\Rightarrow P(0|3)$
Keine Asymptoten
Keine Symmetrie bzgl. KoSy

e) $f_e(x) = -1{,}5 \cdot 3^x$
$D_{max} = \mathbb{R}$
$W = \mathbb{R}^-$
Nullstellen: $0 = -1{,}5 \cdot 3^x \quad \Rightarrow \quad 0 = 3^x$ es gibt keine Zahl x, sodass diese Gleichung stimmt.
SP mit y-Achse: $f_e(0) = -1{,}5$
$\Rightarrow P(0|-1{,}5)$
Waagerechte Asymptote $y = 0$
Keine Symmetrie bzgl. KoSy

S. 149 Nr. 4, a,c,e,g,i,

a) $g_a(s) = 2\,s^3 - s^2 - 2s = s \cdot (2s^2 - s - 2)$
....
$s_1 = 0;\ \ s_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4};\ s_3 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$

c) $g_c(x) = 2\sin(x - \pi)$
$x_k = k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$

e) $g_e(x) = \frac{x-2}{2x+3}$
Nullstellenkandidat: Nullstellen des Zählers: $x = 2$, Überprüfung am Nenner:
$2 \cdot\ 2 - 3 = 1 \neq 0\ \Rightarrow$ Nullstelle vom Zähler ist Nullstelle der Funktion $x = 2$

g) $g_g(x) = 2x \cdot \sqrt{x-3}$ Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist: Damit erhält man: $x_1 = 0$ (1. Faktor) und $x_2 = 3$ (2. Faktor)

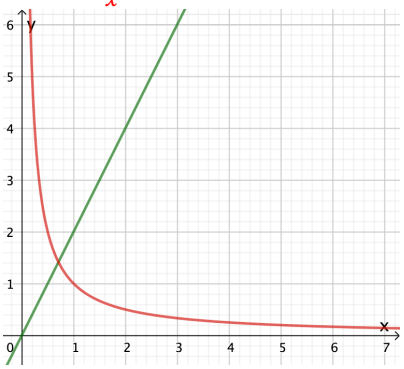
i) $g_i(t) = (t^2 - 1) \cdot (2t + 1)^2 \cdot\ (t - 4)$
1. Faktor: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$,
2. Faktor: $x_3 = -\frac{1}{2}$ (Doppelte Nullstelle wegen „Quadrat“)
3. Faktor: $x_4 = 4$

S. 149 Nr. 5

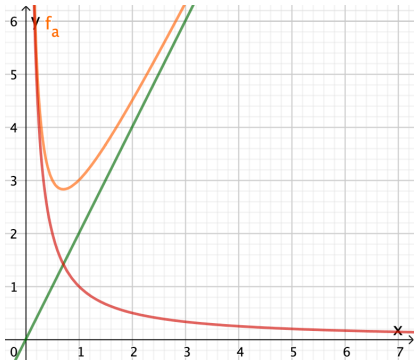
Art der Funktion	Funktionen
Trigonometrische Funktion	a, v, q, m
lineare Funktion:	f,k,
quadratische Funktion:	W
ganzrationale Funktion dritten oder höheren Grades	b,i,j,n, s,t,
Exponentialfunktion	c, g
Gebrochenrationale Funktionen	d, h, z, l, y,o, p, u,
Wurzelfunktion	e, r

S. 149 Nr. 7 a,b,c,d,
Tipp: Beide Funktionsteile addieren und an jeder Stelle die Funktionswerte addieren

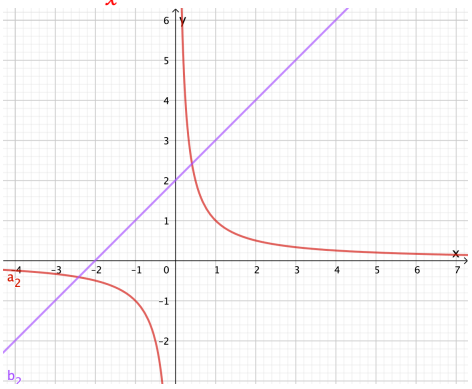
a) $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$



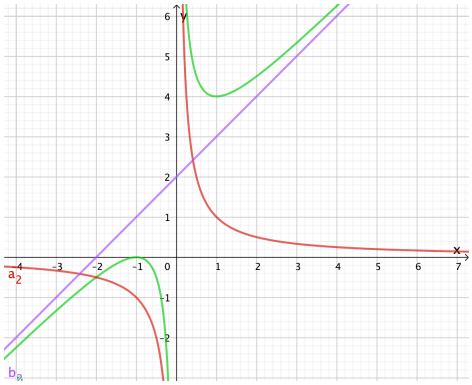
$\Rightarrow$



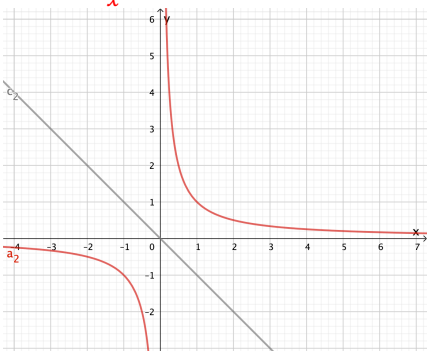
b) $h(x) = \frac{1}{x} + 2x$



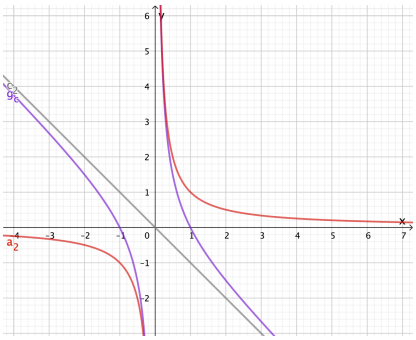
$\Rightarrow$



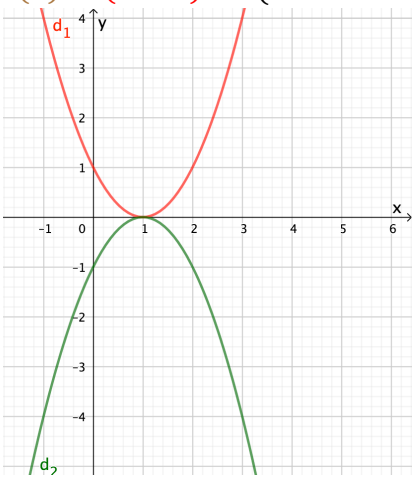
c) $g(x) = \frac{1}{x} - x$



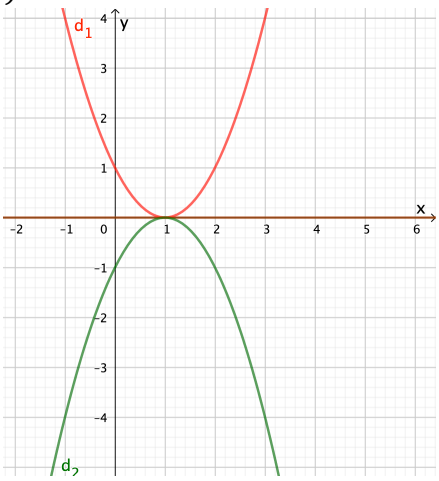
$\Rightarrow$



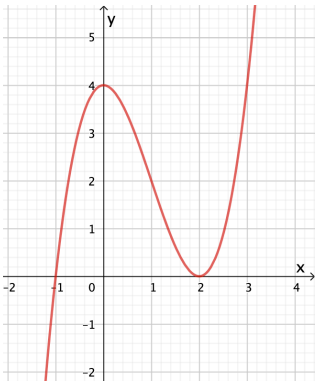
d) $r(x) = (x-1)^2 + (-x^2 + 2x - 1)$



$\Rightarrow$

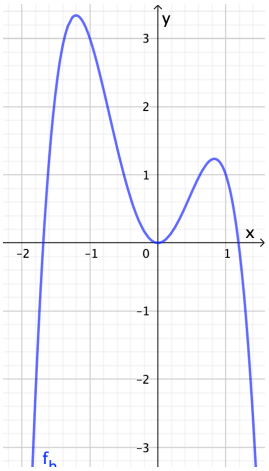


S. 150 Nr. 10 a,b,c,

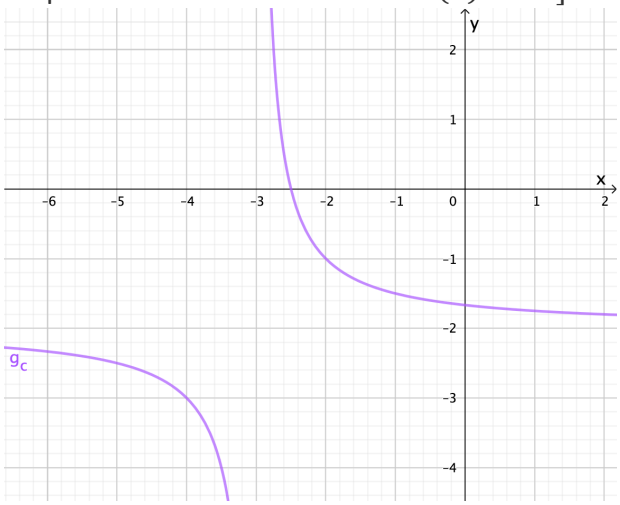


a) $h(x) = (x+1) \cdot (x-2)^2$
keine Def. Lücke,
Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$ (Doppelte Nullstelle)
Graph oberhalb der x-Achse $\Rightarrow h(x) > 0$: $]-1;\ 2[$ und $]2;\ +\infty[$
Alternative Schreibweise: $]-1;\ +\infty[\ \backslash\{2\}$
Graph unterhalb der x-Achse $\Rightarrow h(x) < 0$: $]-\infty; -1[$

b) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x^4 = x^2 \cdot (-2x^2 - x + 4)$
keine Def. Lücke,
Nullstellen: $x_1 = 0$ (Doppelte Nullstelle), $x_2 = -\frac{1+\sqrt{33}}{4} \approx -1{,}69$, $x_3 = -\frac{1-\sqrt{33}}{4} \approx 1{,}19$
Graph oberhalb der x-Achse $\Rightarrow h(x) > 0$: $]-\frac{1+\sqrt{33}}{4}; \frac{\sqrt{33}-1}{4}[\ \backslash\{0\}$
Graph unterhalb der x-Achse $\Rightarrow h(x) < 0$: $]-\infty; -\frac{1+\sqrt{33}}{4}[$ und $]\frac{\sqrt{33}-1}{4};\ +\infty[$



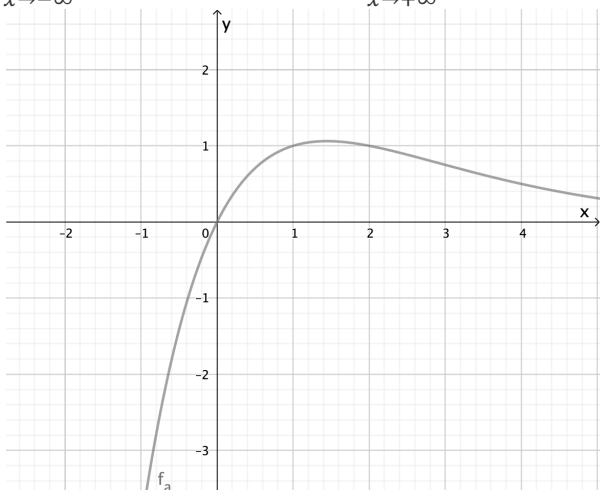
c) $g(x) = \frac{1}{x+3} - 2$
Definitionslücke bei $x = -3$
Nullstellen: $x_1 = -2{,}5$
Graph oberhalb der x-Achse $\Rightarrow h(x) > 0$: $]-3; -2{,}5[$
Graph unterhalb der x-Achse $\Rightarrow h(x) < 0$: $]-\infty; -3[$ und $]-2{,}5;\ +\infty[$



Nr. 11 a,b,c

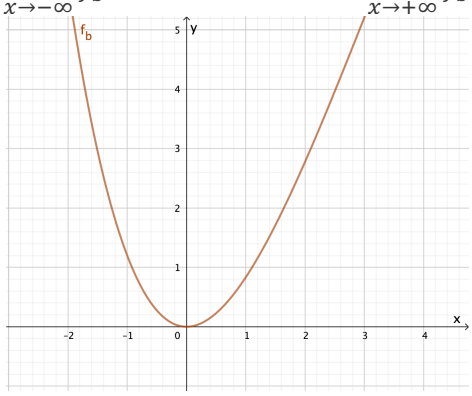
a) $f_a(x) = \frac{2x}{2^x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = -\infty,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = 0$

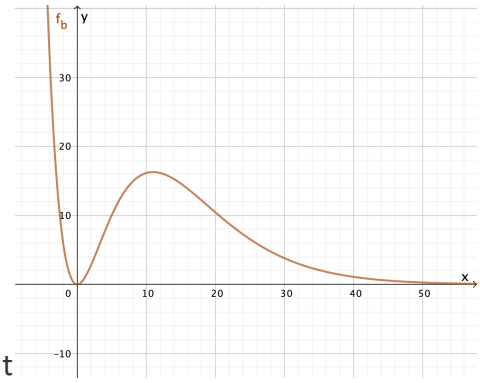


b) $f_b(x) = \frac{x^2}{1{,}2^x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_b(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_b(x) = 0$

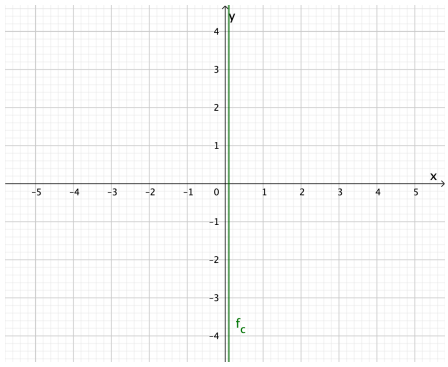


herausgezoomt



c) $f_c(x) = \frac{2x-0{,}2}{0{,}02x^2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_c(x) = 0,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_c(x) = 0$



herausgezoomt

S. 151 Nr. 14,
Die Funktion hat keine Asymptote oder Definitionslücke (gelber Graph entfällt). Sie ist ein Produkt aus einer linearen und einer trigonometrischen Funktion (Lila Graph entfällt).
Da sich der blaue und der rote Graph in ihrer Symmetrie unterscheiden, untersuchen wir noch auf Symmetrie:

$$f(x) = 0{,}6x \cdot [\cos(0{,}5x)]^2$$
$$f(-x) = 0{,}6(-x) \cdot [\cos(0{,}5(-x))]^2 = -0{,}6x \cdot [\cos(0{,}5x)]^2 = -f(x)$$

⇒ Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung ⇒ es ist der blaue Graph.

Nr. 15

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 0{,}25} - 2$$

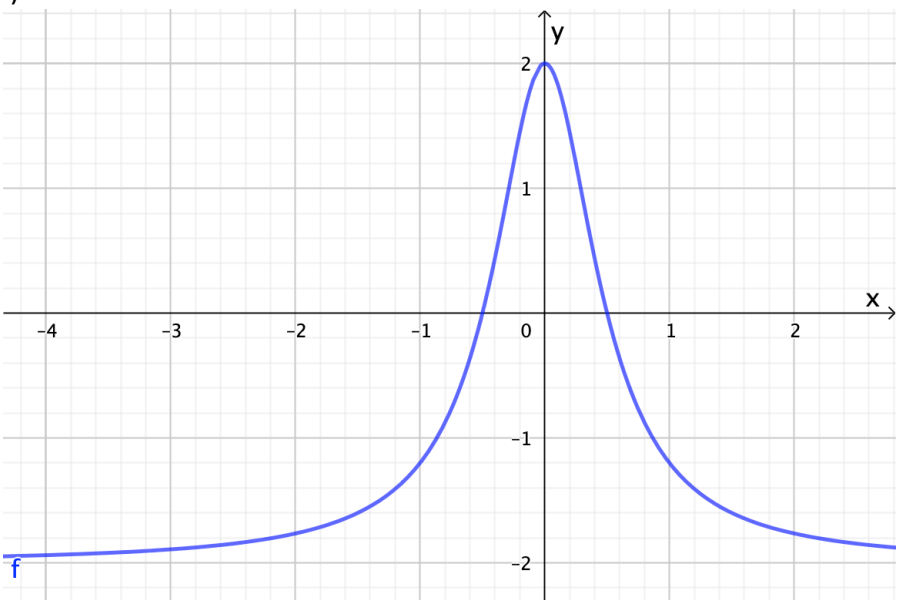
a) Im Nenner steht eine quadratische Funktion ohne Nullstellen, denn
$$0 = x^2 + 0{,}25 \qquad | - 0{,}25$$
$$-0{,}25 = x^2$$
es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, sodass die Gleichung erfüllt wäre. Damit ist der Nenner nullstellenfrei und damit hat die Funktion keine Definitionslücke und damit ist $D_f = \mathbb{R}$.

b) Symmetrie:
$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 0{,}25} - 2 = \frac{1}{x^2 + 0{,}25} - 2 = f(x)$$
⇒ Achsensymmetrisch zur y- Achse

c) Da der x-Wert nur im Nenner auftritt, heißt das also, dass für den niedrigsten Wert im Nenner der Funktionswert der Funktion f größtmöglich wird. Der Nenner ist eine um 0,25 in positive y- Richtung verschobene, nach oben geöffnete Normalparabel, deren Scheitel bei $S(0|0{,}25)$ liegt. Damit ist der niedrigste Wert des Nenners bei $x = 0$, also liegt dort auch der höchste Funktionswert der Funktion f
$$f(0) = \frac{1}{0^2 + 0{,}25} - 2 = 2$$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

e) Der höchste Funktionswert ist +2, es gibt keine senkrechten Asymptoten oder Definitionslücken (er ist „stetig“), der Grenzwert für $x \to \infty$ ist -2. Dann **muss** der Graph der Funktion $f(x)$ die x- Achse im Bereich $x > 0$ mindestens einmal schneiden. $f(x)$ ist für $x > 0$ fallend (die Funktionswerte werden also immer kleiner, je größer x wird), damit ist jeder Funktionswert „nach“ der Nullstelle immer kleiner als 0. Für $x > 0$ gibt es also nur eine Nullstelle.
Aus b) wissen wir, dass der Graph achsensymmetrisch zur y- Achse ist. Damit gibt es zu der Nullstelle x_1 die zweite Nullstelle $x_2 = -x_1$ als Gegenzahl der ersten Nullstelle
$$0 = \frac{1}{x^2 + 0{,}25} - 2 \qquad | + 2$$
$$\frac{1}{x^2 + 0{,}25} = 2 \qquad | \cdot (x^2 + 0{,}25)$$
$$2x^2 + 0{,}5 = 1 \quad | - 0{,}5$$

$$2x^2 = 0{,}5 \quad | \div 2$$
$$x^2 = \frac{1}{4} \quad | \sqrt{}$$
$$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

f)