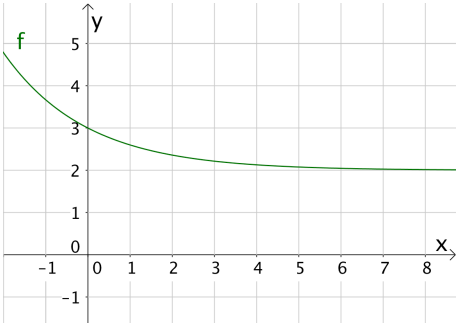
VI.3 Grenzwerte im Unendlichen

A. Der Grenzwert

Beispiel 1: $f(x) = 0{,}6^x + 2$



Für immer größer werdende Werte von x

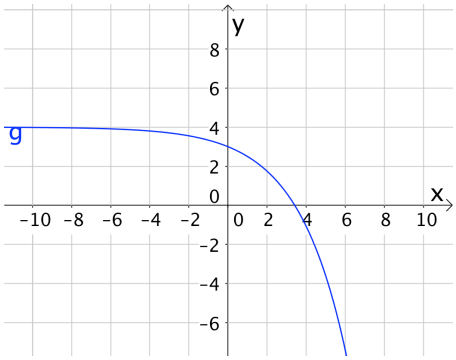
_____

_____

Man schreibt mathematisch kurz:

_____

Beispiel 2: $g(x) = 4 - 1{,}5^x$



Für immer größer werdende Werte von x

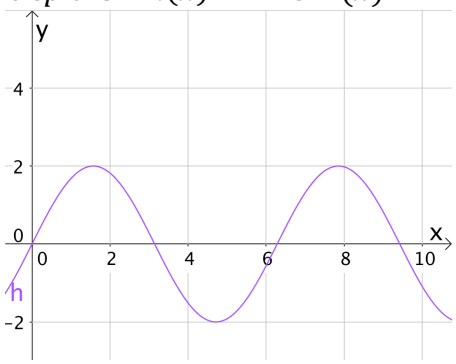
_____

_____

Man schreibt mathematisch kurz:

_____

Beispiel 3: $h(x) = 2 \cdot \sin(x)$



Für immer größer werdende Werte von x

_____

_____

Man schreibt mathematisch kurz:

_____

Merke:

Für $x \to +\infty$ unterscheiden wir drei Fälle:

1. Die Funktion _____ gegen einen bestimmten Wert a. D.h. ihr Graph schmiegt sich für $x \to +\infty$ beliebig nahe an die _____ _____ an.

   Mathematisch kurz:

   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = a}$$

2. Die Funktion _____. D.h. ihr Graph verschwindet für $x \to +\infty$ nach **oben** ($+\infty$) oder nach **unten** ($-\infty$).

   Mathematisch kurz:

   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty}$$

3. Die Funktion _____. D.h. ihr Graph schwankt für $x \to +\infty$ hin und her, ohne einem bestimmten Wert beliebig nahe zu kommen.

   Mathematisch kurz:

   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ existiert nicht}}$$

Für beliebig kleine Werte von x, also $x \to -\infty$, gilt es ebenfalls.

B. Bruchfunktionen und ihr Verhalten im Unendlichen

Beispiel 1: *Gib die Grenzwerte von* $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ *für* $x \to +\infty$ *und* $x \to -\infty$ *an.*

Lösung: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} + 1 =$ ____ *und* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} + 1 =$ _____

Beispiel 2: *Gib die Grenzwerte von* $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $h(x) = \frac{1}{x^3}$ *und* $i(x) = \frac{1}{x^4}$ *für* $x \to +\infty$ *und* $x \to -\infty$ *an.*

Lösung: _____ *und* _____

_____ *und* _____

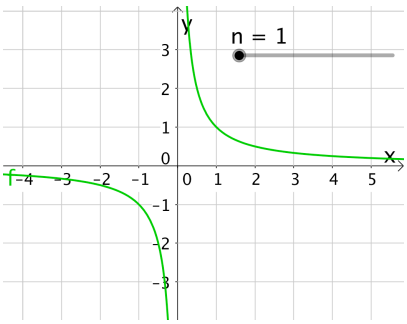
_____ *und* _____

Merke:

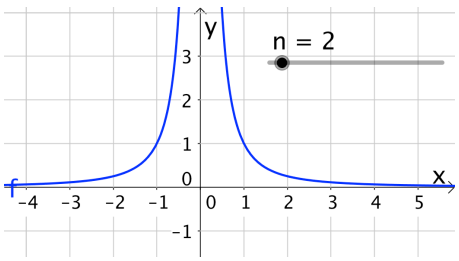
Für einfache gebrochenrationale Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt:

1. $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \_\_\_}$
2. $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \_\_\_}$

Beispiel 1: $f(x) = -$



Beispiel 2: $f(x) = -$



Kleine Übung: Bestimme die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ von

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 4$ _____

b) $g(x) = \frac{1}{x^3+2} - 5$ _____

c) $h(x) = \frac{4x+2}{5x^3+2}$ *Wichtiger Trick: Aus dem Zähler und dem Nenner die <u>höchste Potenz</u> des <u>Nenners</u> ausklammern.*

Ausführliche Lösung:

*Term mit der höchsten Potenz im **Nenner**:* _____

Zähler: $4x + 2 =$ _____

Nenner: $5x^3 + 2 =$ _____

d.h.:

auf die gleiche Weise: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) =$ ____

d) $i(x) = \frac{2x^4+3}{4x^4+3x^3}$

*Term mit der höchsten Potenz im **Nenner**:* ___

d.h.:

C Potenzfunktionen und ihr Verhalten im Unendlichen

Beispiel: Gib die Grenzwerte von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

Lösung: _____ *und* _____

_____ *und* _____

Überlege, wovon der Grenzwert der allgemein geschriebenen Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ abhängt. Überprüfe deine Vermutung für $n = 4$ und $n = 5$, also $h(x) = x^4$ und $i(x) = x^5$:

_____ *und* _____

_____ *und* _____

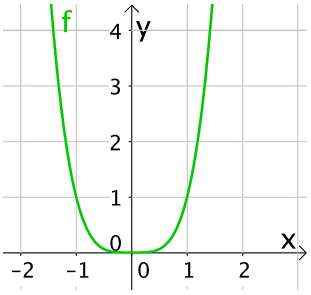
Merke:

Bei den Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit natürlichem Exponenten n (d.h. $n \in \mathbb{N}$) gilt:

1. für gerade n:

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \_\_\_\_$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = \_\_\_\_$$



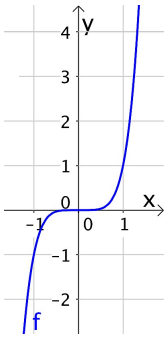
Graph von $f(x) = x$__

2. für ungerade n:

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \_\_\_\_$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = \_\_\_\_$$

Graph von $f(x) = x$__



Kleine Übung: Bestimme die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ von

a) $f(x) = 3x^3$ _____ _____

b) $g(x) = -4x^5$ _____ _____

c) $h(x) = 2{,}5x^3 + 2x^2$ _____ _____

D Ganzrationale Funktionen und ihr Verhalten im Unendlichen

Ein Term, wie $2{,}5x^{\mathbf{3}} + 2x^2$, heißt Polynom vom Grad **3**.

Allgemein:

Ein Term der Form

$$a_n x^{\boldsymbol{n}} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

heißt **Polynom vom Grad $\boldsymbol{n}$**. Die Faktoren vor den Potenzen, also a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 und a_0 heißen Koeffizienten.

Kann ein Funktionsterm auch als Polynom vom Grad n geschrieben werden, nennt man sie **Polynomfunktion (bzw. ganzrationale Funktion) vom Grad $\boldsymbol{n}$**

$$f(x) = a_n x^{\boldsymbol{n}} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Besserwisser-Ecke:

Poly-nom (griech). bedeutet wörtlich: „Viel-ausdruck“ und meint „Vielgliedriger Rechen-Ausdruck“