Das Ziegenproblem

Problemstellung:

Du bist Kandidat in einer Fernsehshow und darfst eine von drei verschlossenen Türen auswählen. Hinter einer Tür verbirgt sich ein Hauptgewinn – ein Auto – hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet. Nachdem du dich für eine Tür entschieden hast, öffnet der Moderator stets eine nicht gewählte Tür, hinter der sich eine Ziege befindet. Danach hast du die Möglichkeit bei der gewählten Tür zu bleiben oder nochmal zu wechseln.



gewählten Tür zu bleiben oder nochmal zu wechseln. Unter dem Link https://www.youtube.com/watch?v=bLVvJHOeAAs findet ihr die Problemstellung nochmal in einem kleinen Video erklärt. Was würdest du tun? Bei der gewählten Tür bleiben □ Tür wechseln □ Es ist egal, was man tut □ Aufgabe 1 Das Ziegenproblem wurde 1990 berühmt, als ein Leser an die US-Zeitschrift "Parade", die obige Fragestellung gestellt hatte. Am 9. November 1990 beantwortete die Journalistin Marilyn vos Savant, bekannt als Mensch mit dem höchsten Intelligenzquotienten, die Frage in ihrer Kolumne "Fragen Sie Marilyn". Sie behauptete darin, dass sich die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn des Autos beim Wechsel der Türen verdoppelt. Leserbrief 1: Liebe Frau Marilyn vos Savant, vielen Dank für Ihren Versuch, das Ziegenproblem zu lösen. Amüsiert habe ich Ihre "Kolumne" gelesen. Vielleicht haben Sie die Problemstellung nicht richtig gelesen (oder die Welt dreht sich bei Ihnen entgegengesetzt). Aber wenn Sie nochmals darüber nachdenken, werden Sie mir schon beipflichten. Schauen Sie: Zu Beginn gibt es drei Möglichkeiten eine Tür auszuwählen. Somit folgt, dass die Wahrscheinlichkeit das Auto zu treffen 1/3 beträgt. Wenn jetzt aber eine Tür wegfällt, stehen nur noch zwei Türen zur Auswahl und demnach liegt die Wahrscheinlichkeit bei ½. Das ist doch nicht zu schwer gewesen. Naja, so ein Fehler kann jedem Mal unterlaufen! Was hält du von diesem Leserbrief? Teilst du die Meinung oder würdest du anders argumentieren? Notiere ein paar kurze Überlegungen. Leserbrief 2: Sehr geehrte Frau Savant, vielen Dank für Ihre erkenntnisreiche Kolumne. Ich bin zwar kein Mathematiker, aber ich glaube ich habe Ihre Argumentation verstanden. Zuerst war ich davon überzeugt, dass ich bei zwei Türen eine fifty-fifty Chance haben würde. Aber nach reiflicher Überlegung kam ich darauf, dass man die Situation von Vornherein betrachten sollte. Das heißt, wenn ich zu Beginn auf eine der drei Türen tippe, so liegt die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto dahinter ist bei 1/3. Somit entfallen auf die anderen beiden Türen 2/3. Wenn nun eine Tür der anderen zweien wegfällt, ist ja die Wahrscheinlichkeit immer noch 2/3, aber auf nur eine Tür verteilt. Deshalb sollte ich nun wechseln. Ich hoffe ich liege mit meiner Argumentation nicht daneben. Was hält du von diesem Leserbrief? Teilst du die Meinung oder würdest du anders argumentieren? Notiere ein paar kurze Überlegungen.

Aufgabe 2

Jetzt wollen wir die Problemstellung mathematisch betrachten: Bleibt man bei seiner gewählten Tür, so beträgt die Gewinnchance für das Auto offensichtlich $\frac{1}{3}$. Die Handlung des Moderators hat hier keinen Einfluss auf die Gewinnchance, da man diese nicht beachtet und sowieso bei der ursprünglichen Wahl bleibt. Nachfolgend soll nun untersucht werden, wie groß die Gewinnwahrscheinlichkeit ist, wenn man die Strategie des Wechselns verfolgt. Wir stellen uns die Situation als dreistufiges Zufallsexperiment vor und nehmen an, dass das Auto hinter Tür 3 steht. Da das Auto hinter Tür 3 steht, kann der Moderator nur die Tür 1 oder die Tür 2 öffnen. Wir definieren nun die Ereignisse:

Z1: "Kandidat zeigt auf Tür 1 (Ziege)"

Z2: "Kandidat zeigt auf Tür 2 (Ziege)"

A: "Kandidat zeigt auf Tür 3 (Auto)"

01: "Moderator öffnet Tür 1 (Ziege)"

02: "Moderator öffnet Tür 2 (Ziege)"

F1: "Kandidat entscheidet sich final für die Tür 1 (Ziege)"

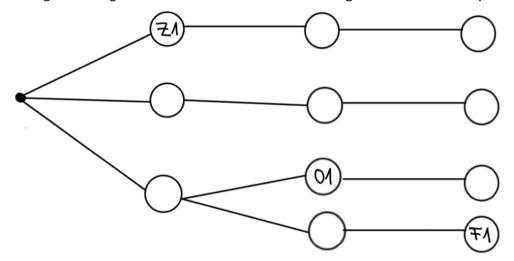
F2: "Kandidat entscheidet sich final für die Tür 2 (Ziege)"

FA: "Kandidat entscheidet sich final für die Tür 3 (Auto)"

Wir legen uns auf die Strategie Wechseln fest und entscheiden uns letztendlich immer für die vom Moderator nicht geöffnete Tür (d.h. zu einer Wahrscheinlichkeit von 1).

Aufgaben

a) Vervollständige das vorstrukturierten Baumdiagramm passend durch Zuordnen der fehlenden Ereignisse. Ergänze auf den Ästen dem Baumdiagramms zudem die passenden Wahrscheinlichkeiten.



- b) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse durch Anwenden der Pfadregel. Notiere die Wahrscheinlichkeiten jeweils hinter den entsprechenden Pfad.
- c) Wir definieren das Ereignis **Z**: "Autogewinn". Bestimme die bedingten Wahrscheinlichkeiten für den Autogewinn, unter der Bedingung nicht zu Wechseln und unter der Bedingung zu Wechseln.

 $P_{Wechseln}(Z) =$

 $P_{NichtWechseln}(Z) =$

d) Formuliere ein kurzes Fazit: