V.4 Lösungen zu den Aufgaben zum Kapitel "Umkehrfunktionen"

B. S. 132

Nr. 2

Die Graphen der Funktionen a, c und e sind streng monoton und somit ist die Funktion umkehrbar.

Die Funktion b ist nicht umkehrbar, da z. B. die x-Achse den Graphen zweimal schneidet.

Die Funktionen d und f sind nicht umkehrbar, da z. B. für y=1,5 die Graphen zweimal geschnitten werden.

Nr. 3

a) $f'(x) = 3x + 1 > 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; x \in \mathbb{R}$
   Das bedeutet, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend ist und somit umkehrbar.

b) $f'(x) = \frac{-2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; x \neq -1$
   Das bedeutet, dass f im Definitionsbereich streng monoton fallend ist und somit umkehrbar.

c) $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; x > \sqrt{\frac{1}{3}}$
   Das bedeutet, dass f im Definitionsbereich streng monoton steigend ist und somit umkehrbar.

d) $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; x > 2$
   Das bedeutet, dass f für alle x>2 streng monoton fallend ist und somit umkehrbar.

Nr.4

a) $f'(x) = \; -2x; x > 1$ Die Funktion ist für $x \in]1; \infty[$ umkehrbar, da $f'(x) < 0$ ist.

b) $f'(x) = -2x; \; x \in \mathbb{R}$ Die Funktion ist nicht umkehrbar. Durch eingrenzen des Defintionsbereichs auf $x \in \mathbb{R}^+$oder $x \in \mathbb{R}^-$ ist sie umkehrbar.

c) $f'(x) = \cos(x)\,; x \in [0; \pi]$ Die Funktion ist nicht umkehrbar, da z. B. gilt: $f(0) = f(\pi)$. Eine mögliche Einschränkung wäre $x \in [0; \frac{\pi}{4}[$.

Nr. 6

a) $f'(x) = -\frac{2}{(x-3)^2} < 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; x > 3$

Somit ist f umkehrbar.

Umkehrfunktion:

$$x = \frac{2}{y-3}$$
$$x(y-3) = 2$$
$$y - 3 = \frac{2}{x}$$
$$y = \frac{2}{x} + 3$$
$$=> f^{-1}(x) = \frac{2}{x} + 3 \; mit \; \mathbb{D}_{f^{-1}} =]0; \infty[; \; \mathbb{W}_{f^{-1}} =]3; \infty[$$

b) $f'(x) = -\frac{4}{(x-2)^2} < 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; x < 2$

Somit ist f umkehrbar.

Umkehrfunktion:

$$x = \frac{4}{y-2}$$
$$x(y-2) = 4$$
$$y - 2 = \frac{4}{x}$$
$$y = \frac{4}{x} + 2$$
$$=> f^{-1}(x) = \frac{4}{x} + 2 \; mit \; \mathbb{D}_{f^{-1}} =]-\infty; 0[; \; \mathbb{W}_{f^{-1}} =]-\infty; 2[$$

c) $f'(x) = \frac{6}{x^2} > 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; x < 0$

Somit ist f umkehrbar.

Umkehrfunktion:

$$x = 4 - \frac{6}{y}$$
$$x - 4 = -\frac{6}{y}$$
$$(x-4)y = -6$$
$$y = -\frac{6}{x-4}$$
$$=> f^{-1}(x) = -\frac{6}{x-4} \; mit \; \mathbb{D}_{f^{-1}} =]4; \infty[; \; \mathbb{W}_{f^{-1}} =]-\infty; 0[$$

Nr.7

a) Alle linearen Funktionen für $m \neq 0$ sind umkehrbar.

b) Alle Potenzfunktionen, für die n ungerade ist, haben eine positive Ableitung, sind somit streng monoton und umkehrbar.

c) Umkehrbare ganzrationale Funktion: $f(x) = x^5 + 3x; \; \mathbb{D} = \mathbb{R}$

d) Umkehrbare gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{3x}{x^2-4}; \; \mathbb{D} =]2; \infty[$

Nr.9

a) Die Aussage ist richtig, da diese Funktionen achsensymmetrisch sind.
b) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$
c) Die Aussage ist richtig, da die Ableitungen dieser Funktionen keinen Vorzeichenwechsel haben.
d) Die Aussage ist richtig, da die Funktion ansonsten nicht streng monoton sein könnte.

Nr.10

Damit f umkehrbar ist muss gelten, dass $m \neq 0$ ist.
Umkehrfunktion:
$x = my + t$

$$x - t = my$$

$$\frac{x-t}{m} = \frac{1}{m}x - \frac{t}{m} = y = f^{-1}(x)$$

Da beide Funktionen gleich sein sollen muss gelten:

$$\frac{1}{m}x - \frac{t}{m} = mx + t$$

daraus folgt, dass $\frac{1}{m} = m$ und $-\frac{t}{m} = t$ sein muss.
Um diese Gleichungen erfüllen zu können muss folgendes gelten:
$m = 1\ und\ t = 0$ oder $m = -1\ und\ t \in \mathbb{R}\ beliebig.$
Somit erhalten wir folgende mögliche Funktionen:
$f(x) = x;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ oder $f(x) = -x + t;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}, t\ beliebig$

Die Graphen dieser Funktionen sind die Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten sowie die zu ihr senkrechten Geraden.