Faktorisierung und Nullstellen

Man kann oft eine Funktion als Produkt ihrer Nullstellen darstellen. Möchte man einen mathematischen Zusammenhang in der Wissenschaft untersuchen, sind Nullstellen von größtem Interesse.

Faktorisierung der Funktion am Beispiel der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

Ziel: Die Funktion soll als Produkt ihrer Nullstellen geschrieben werden:

1. Schritt: Eine Nullstelle raten (Wichtig: eine Nullstelle ist immer ein ganzzahliger Teiler des Koeffizienten ohne x):
   Probiere $x = 1$:

$$f(1) = 1^3 - 1^2 - 5 \cdot 1 - 3 = -8 \neq 0$$
$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 3 =$$
$$= -1 - 1 + 5 - 3 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = -1$$
$$\Rightarrow {\color{red}x_1 + 1} = 0$$

2. Schritt: Teile schriftlich die Funktion durch die Nullstelle:

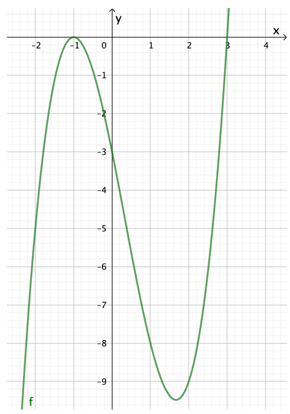
$$
\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x + 1) = x^2 - 2x - 3 \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\quad -2x^2 \\
\quad \underline{-(-2x^2 - 2x)} \\
\qquad -3x \\
\qquad \underline{-(-3x - 3)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zum Vergleich: Schriftliches Dividieren:

$$
\begin{array}{l}
1573 : 13 = 121 = 11^2 \\
\underline{-13} \\
\;\; 27 \\
\underline{-26} \\
\;\;\; 13 \\
\;\; \underline{-13} \\
\;\;\;\; 0
\end{array}
$$

Wichtig: die Division durch eine Nullstelle muss aufgehen!

3. Schritt: Finde – falls vorhanden – die restlichen Nullstellen.
   Jetzt ist „Mitternachtsformel“ („a,b,c-Formel“) leichter:
   $\Rightarrow x_2 = -1;\ x_3 = 3$



4. Schritt: Schreibe Funktion als Produkt ihrer Nullstellen:

$$f(x) = (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) = (x + 1)^2 \cdot (x - 3)$$

Wenn man dieses Produkt ausmultipliziert kommt man wieder auf den Funktionsterm in der anderen Schreibweise.

Übungsaufgabe: Zeige mithilfe der Polynomdivision, dass gilt:

a) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$

b) $h(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$