4. Die Umkehrfunktion

Bsp:

a) Berechnung von Nullstellen bei Funktionen:

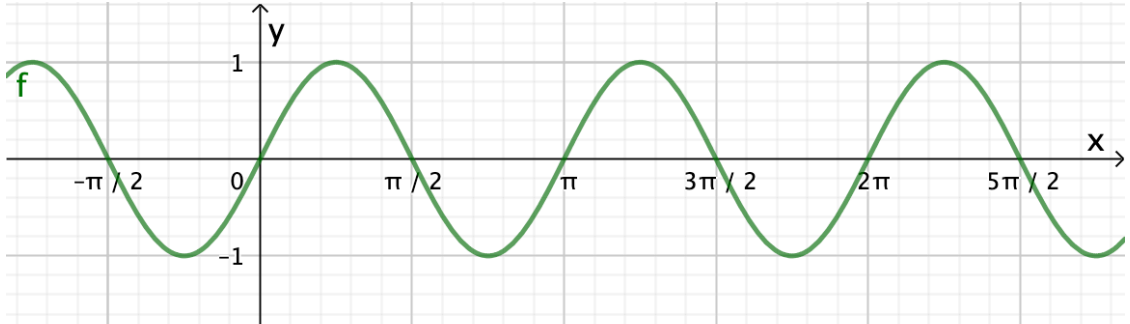
$f(x) = \sin(2x)$

$0 = \sin(2x)$

$\sin^{-1}(0) = 2x$

$k \cdot \pi = 2x \qquad k \in \mathbb{Z}$

$x_k = \frac{k \cdot \pi}{2}$



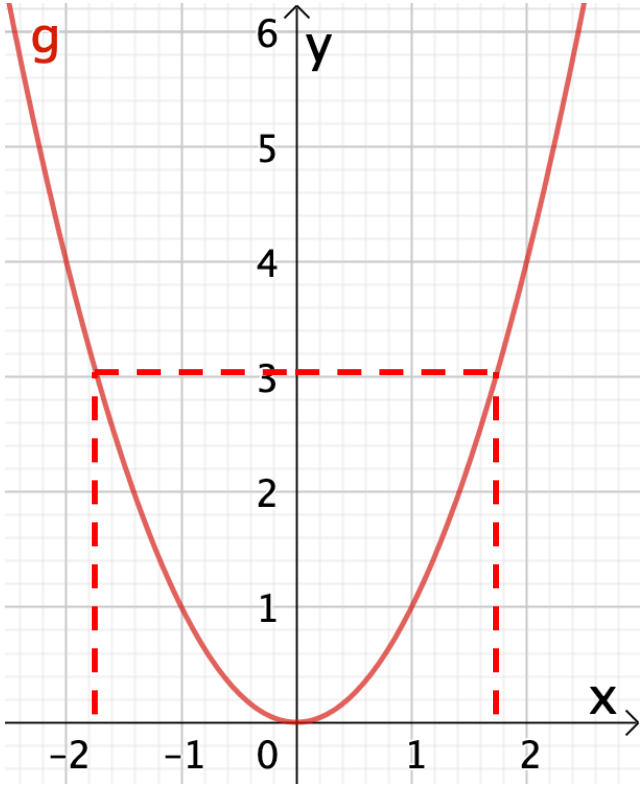
b) Zu Funktionswert gehöriger x-Wert berechnen

$g(x) = x^2$

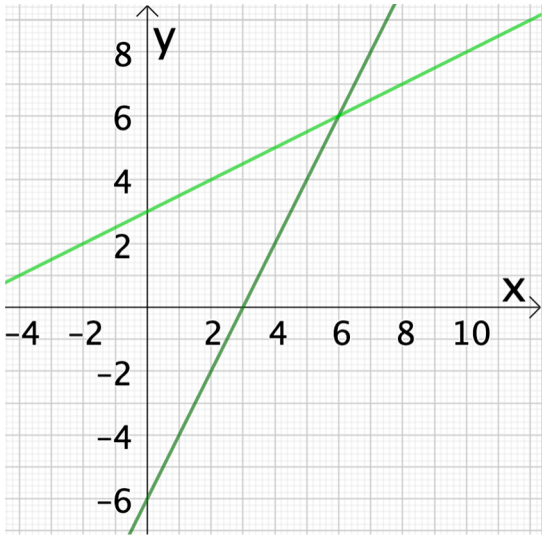
$3 = x^2 \quad | \sqrt{}$

$x_1 = \sqrt{3},$

$x_2 = -\sqrt{3}$



4. Die Umkehrfunktion



Bisher: Umkehrung nur an einzelnen Punkten

Neu: Betrachtung der Umkehrung als Funktion

Wie erhält man die Umkehrfunktion?

c) Umkehrfunktion von $h(x) = 2x - 6$ bilden:

$$y = 2x - 6$$

$$x = \frac{y + 6}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}y + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$\boxed{h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 3}$$

i. Schreibe y statt $h(x)$

ii. Löse nach x auf

iii. Vertausche die Buchstaben x und y

iv. Ersetze am Schluss y mit $h^{-1}(x)$

4. Die Umkehrfunktion

Der Graph der Umkehrfunktion entsteht aus dem Graphen der Funktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden

$$y = x$$

Da f^{-1} eindeutig ist, ist $f^{-1}(x)$ eine Funktion und heißt Umkehrfunktion.

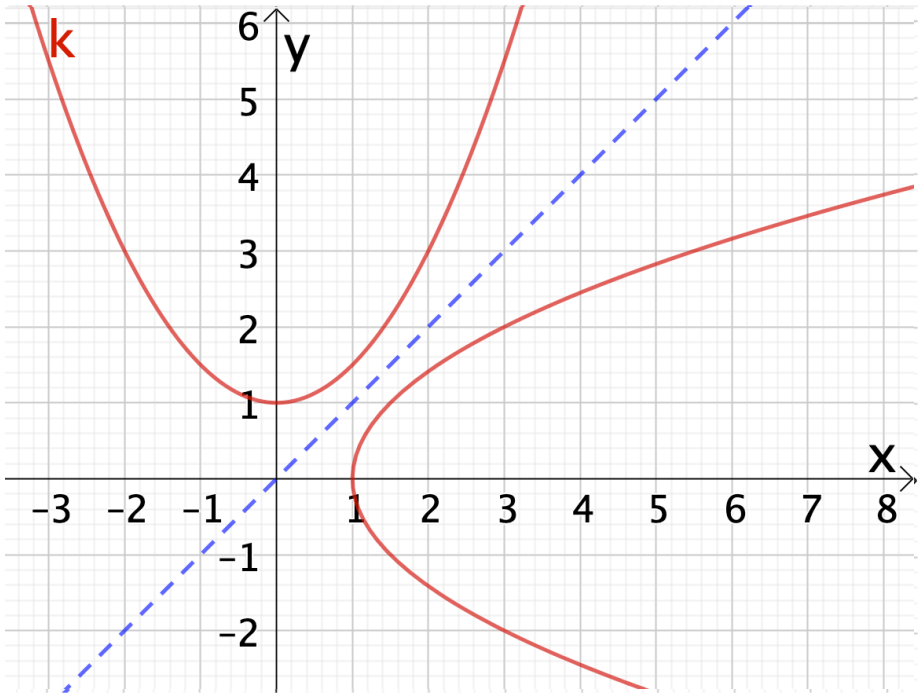
f heißt dann „umkehrbar“.

Sind alle Funktionen umkehrbar?

4. Die Umkehrfunktion

d) Umkehrfunktion von $i(x) = x^2 + 1$, mit $\mathrm{D_i} = \mathbb{R}$ soll gebildet werden

1. Versuch geometrisch: Spiegelung des Funktionsgraphen an der Winkelhalbierenden:



Problem: Das ist keine Funktion mehr!
Zu x=3 gehören mehrere Funktionswerte

4. Die Umkehrfunktion

d) Umkehrfunktion von $i(x) = x^2 + 1$, mit $\mathrm{D_i} = \mathbb{R}$ soll gebildet werden

2. Versuch rechnerisch:

$$y = x^2 + 1 \qquad | -1$$
$$y - 1 = x^2 \qquad | \sqrt{}$$
$$x_{1/2} = \pm\sqrt{y - 1}$$
$$y_{1/2} = \pm\sqrt{x - 1}$$

Jedem x werden zwei Werte zugeordnet, damit ist es keine Funktion.

4. Die Umkehrfunktion

d) Umkehrfunktion von $i(x) = x^2 + 1$, mit ~~$D_i = \mathbb{R}$~~ soll gebildet werden

3. Versuch: Der Definitionsbereich wird eingeschränkt auf $D_i = \mathbb{R}_0^+$, der Wertebereich bleibt gleich ($W_i = [1; \infty[$)

$$y = x^2 + 1 \quad | -1$$
$$y - 1 = x^2 \quad | \sqrt{}$$
$$x = +\sqrt{y-1}$$
$$y = +\sqrt{x-1}$$
$$i^{-1}(x) = +\sqrt{x-1}$$

Die Umkehrfunktion hat den Definitionsbereich $D_{i^{-1}} = [1; \infty[$ und den Wertebereich $W_{i^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$

Streng monotone Funktionen sind umkehrbar.

4. Die Umkehrfunktion

Merke: Allgemeines Vorgehen zur Bestimmung der Umkehrfunktion von f:

1) D_f einschränken (wenn nötig)
2) W_f bestimmen
3) Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen
4) x und y vertauschen
5) $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$
6) Graph $G_{f^{-1}}$ ergibt sich als Spiegelung von G_f an Winkelhalbierende $(y = x)$