5. Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und ihre Ableitung

Wiederholung: Ganzrationale Funktionen $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ haben die Ableitung:

$$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$$

Aus Kapitel V.3 ist die Ableitung von $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ bekannt:

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

Beispiel

a) Bilden Sie die Ableitung der Funktion $h(x) = x^{\frac{5}{2}}$

5. Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und ihre Ableitung

a) Bilden Sie die Ableitung der Funktion $h(x) = x^{\frac{5}{2}}$

$$h(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5$$

Ableitung mithilfe der Kettenregel:

$$h'(x) = 5 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$h'(x) = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{4}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

Vermutung für die Ableitung

5. Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und ihre Ableitung

Definition:

Eine Funktion f der Bauart $f: x \mapsto a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a \cdot \sqrt[q]{x^p}$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, q \in \mathbb{N}$ heißt Potenzfunktion mit rationalem Exponenten.

Eigenschaften (M11.3.1-5-ration.Exponenten-Ableitung.ggb, LS S. 139):

	Exponent >0	Exponent <0
Definitionsmenge:	$D_f = \mathbb{R}_0^+$	$D_f = \mathbb{R}^+$
Graph nimmt	streng monoton zu	streng monoton ab
Gemeinsame Punkte:	(0|0), (1|1)	(1|1)

5. Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und ihre Ableitung

Satz:

Rationale Funktion f der Bauart $f(x) = a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a \cdot \sqrt[q]{x^p}$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, q \in \mathbb{N}$ haben die Ableitung:

$$f'(x) = \frac{p}{q} \cdot a \cdot x^{\frac{p}{q} - 1}$$

Beispiele

b) $g(x) = x^{\frac{3}{5}}$

$$g'(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5} - 1} =$$

5. Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und ihre Ableitung

c) $h(x) = \sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$

$$h'(x) = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7 \cdot \sqrt[7]{x^6}}$$